Örnek:1 25 aileden meydana gelen bir örneklemde, ailelerin ilk yetişkin oğullarının X_1: Baş uzunluğu ve X_2: Baş genişliği ölçülerek aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu verilere göre :

a) $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ değişkenler sistemine TBA uygulamanın gerekli olup olmadığına karar veriniz?

b) $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ sistemi içi TB'leri bulunuz ve yorumlayınız?

c) Elde edilen TB'lerin varyanslarını bulunuz ve ilişkisiz olduklarını gösteriniz?

d) Her bir TB'nin Başlangıç sistemine ait toplam varyansı hangi oranda açıkladığını belirleyiniz?

e) TBA sonucunda elde edilen yeni eksenlerin (TB'lerin) konumunu grafik çizerek açıklayınız?

f) Her bir TB'nin X_1 ve X_2 değişkenleri ile korelasyonlarını hesaplayınız?

g) Her bir örnek birimi için TB skorlarını bulunuz?

X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
191	155	208	157	179	158	163	137	192	154
195	149	189	150	183	147	195	155	174	143
181	148	197	159	174	150	186	153	176	139
183	153	188	152	190	159	181	145	197	167
176	144	192	150	188	151	175	140	190	163

Çözüm: Başlangıç sistemi $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ değişkenlerinin oluşturduğu bir sistem olup, bu kitle için parametreler sırasıyla $E(\underline{X}) = \underline{\mu}$ ve $Cov(X) = \Sigma$ olduğunu kabul edelim. Parametreler bilinmediğinden bunların örneklemden tahmin edilen yansız tahmin edicilerini kullanabiliriz. Bu parametrelerin tahmin edicileri sırasıyla örnek ortalama vektörü ve örnek varyans kovaryans matrisidir. Bu sebeple önce verilen örneklem için örnek ortalama vektörü, örnek varyans kovaryans matrisi ve örnek korelasyon matrisini bulalım.

$$\underline{\overline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185{,}7 \\ 151{,}1 \end{bmatrix} ; S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 95{,}29 & 52{,}87 \\ 52{,}87 & 54{,}36 \end{bmatrix} ; R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}73 \\ 0{,}73 & 1{,}00 \end{bmatrix}$$

a) Küresellik testi uygulanır.

$H_0 = R = I_2$

$H_1 : R \neq I_2$

Test istatistiği: $\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{2P+5}{6}\right] ln|R| \sim \chi^2_{p(p-1)/2}$

$n = 25, p = 2 \; ve \; |R| = 1 - (0{,}73)^2 = 0{,}4671$ olduğundan, test istatistiğinin alabileceği değer;

$\chi^2 = -\left[25 - 1 - \frac{9}{6}\right]\ln(0{,}4671) = 17{,}127$

dir. $\alpha = 0{,}05$ için kritik değer $\chi^2_{\frac{p(p-1)}{2};\alpha} = \chi^2_{1;0{,}05} = 3{,}8$ dir. Buna göre 17,127 > 3,8 olduğundan H_0 ret edilir. O halde başlangıç sistemine ait veriler küresel yapıda değildir. Bu sebeple verilere TBA uygulanması gereklidir.

b) TB'ler X_1 ve X_2 değişkenlerinin doğrusal bağıntıları olup;

1.TB → $Y_1 = \underline{a}'_1\underline{X} = a_{11}X_1 + a_{12}X_2$

2.TB → $Y_2 = \underline{a}'_2\underline{X} = a_{21}X_1 + a_{22}X_2$ şeklindedir. Burada $\underline{a}_1$ ve $\underline{a}_2$; S matrisinin normalleştirilmiş öz vektörleridir. Bu nedenle önce S matrisinin öz değerleri ve öz vektörleri bulunmalıdır. Öz değerler

$$|S - \lambda I| = \begin{vmatrix} 95{,}29 - \lambda & 52{,}87 \\ 52{,}87 & 54{,}36 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 149{,}65\lambda + 2384{,}7275 = 0 \ \Rightarrow$$

$\lambda_{1,2} = \frac{149{,}65 \pm \sqrt{12856{,}2125}}{2} \ \Rightarrow \ \begin{cases} \lambda_1 = 131{,}52 \\ \lambda_2 = 18{,}13 \end{cases}$ olarak bulunur.

$\underline{\lambda_1 = 131{,}52 \text{ için öz vektör}}$

$(S - \lambda_1 I)\underline{a}_1 = \underline{0} \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} -36{,}23 & 52{,}87 \\ 52{,}87 & -77{,}16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \underline{0} \ \Rightarrow \ \begin{cases} -36{,}23a_{11} + 52{,}87a_{12} = 0 \\ 52{,}87a_{11} - 77{,}16a_{12} = 0 \end{cases}$ bu denklem sistemi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan parametreye bağlı sonsuz çözümleri vardır. Bu çözümler; $0 \neq t \in IR$ olmak üzere $a_{12} = t$ alınırsa, $-36{,}23a_{11} + 52{,}87t = 0 \Rightarrow a_{11} = \frac{52{,}87}{36{,}23}t = 1{,}46t$ olup; $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}46t \\ t \end{bmatrix}$ şeklindedir. Elde edilen sonsuz çözüm vektörü normlandığında;

$\underline{a}^*_1 = \frac{1}{\sqrt{\underline{a}'_1\underline{a}_1}} \times \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}46/\sqrt{3{,}1316} \\ 1/\sqrt{3{,}1316} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}825 \\ 0{,}565 \end{bmatrix}$ şeklinde bir tek vektör gösterir. Bu vektör $\lambda_1 = 131{,}52$ öz değerine karşılık gelen birim normal öz vektör olup; $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}825 \\ 0{,}565 \end{bmatrix}$ olarak gösterilir.

$\underline{\lambda_2 = 18{,}13 \text{ için öz vektör}}$

$(S - \lambda_2 I)\underline{a}_2 = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 77{,}10 & 52{,}87 \\ 52{,}87 & 36{,}17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \underline{0} \ \Rightarrow \ \begin{cases} 77{,}10a_{21} + 52{,}87a_{22} = 0 \\ 52{,}87a_{21} + 36{,}17 = 0 \end{cases}$ bu denklem sistemi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan parametreye bağlı sonsuz çözümleri vardır. Bu çözümler; $0 \neq t \in IR$ olmak üzere $a_{22} = t$ alınırsa, $77{,}10a_{21} + 52{,}87t = 0 \ \Rightarrow \ a_{21} = -\frac{52{,}87}{77{,}10}t = -0{,}686t$ olup; $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}686t \\ t \end{bmatrix}$ şeklindedir. Elde edilen sonsuz çözüm vektörü normlandığında;

$\underline{a}^*_2 = \frac{1}{\sqrt{\underline{a}'_2\underline{a}_2}} \times \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -0,686/\sqrt{1,471} \\ 1/\sqrt{1,471} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,565 \\ 0,825 \end{bmatrix}$ şeklinde bir tek vektör gösterir. Bu vektör $\lambda_2 = 18,13$ öz değerine karşılık gelen birim normal öz vektör olup; $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} -0,565 \\ 0,825 \end{bmatrix}$ olarak gösterilir.

Buna göre;

1.TB → $Y_1 = \underline{a}'_1\underline{X} = 0,825X_1 + 0,565X_2$

2.TB → $Y_2 = \underline{a}'_2\underline{X} = -0,565X_1 + 0,825X_2$ olarak elde edilir.

Yorum: 1.TB'de X_1 katsayısı daha büyük olduğundan, bu TB'nin varyansına X_1 değişkeni daha fazla katkı yapar. 2.TB'de ise X_2'nin katsayısı daha büyük (mutlak değerce) olduğundan, 2.TB'nin varyansına en fazla katkıyı X_2 değişkeni yapar.

c) $Var(Y_1) = Var(\underline{a}'_1\underline{X}) = \underline{a}'_1S\underline{a}_1 = [0,825 \quad 0,565] \begin{bmatrix} 95,29 & 52,87 \\ 52,87 & 54,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,825 \\ 0,565 \end{bmatrix} \cong 131,52 = \lambda_1$

$Var(Y_2) = Var(\underline{a}'_2\underline{X}) = \underline{a}'_2S\underline{a}_2 = [-0,565 \quad 0,825] \begin{bmatrix} 95,29 & 52,87 \\ 52,87 & 54,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,565 \\ 0,825 \end{bmatrix} = 18,13 = \lambda_2$

$Cov(Y_1, Y_2) = Cov\left(\underline{a}'_1\underline{X}, \underline{a}'_2\underline{X}\right) = \underline{a}'_1S\underline{a}_2 = [0,825 \quad 0,565] \begin{bmatrix} 95,29 & 52,87 \\ 52,87 & 54,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,565 \\ 0,825 \end{bmatrix} \cong 0$

olduğundan Y_1 ve Y_2 TB'leri ilişkisizdir.

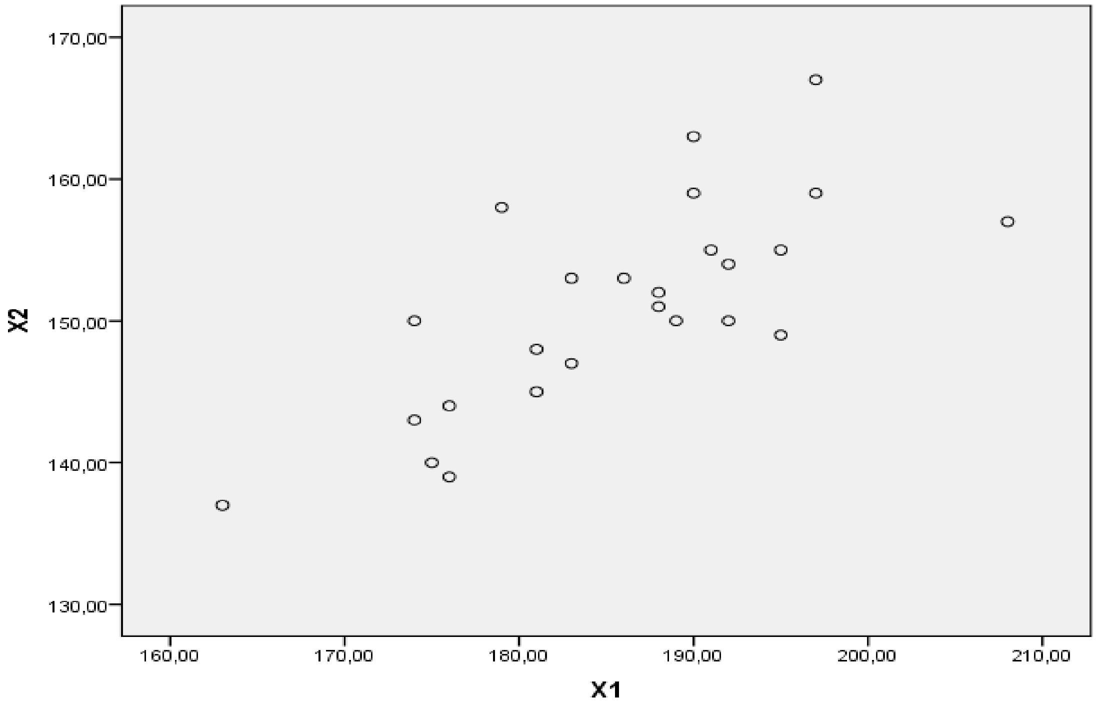
d) Başlangıç sistemine ait toplam varyans:

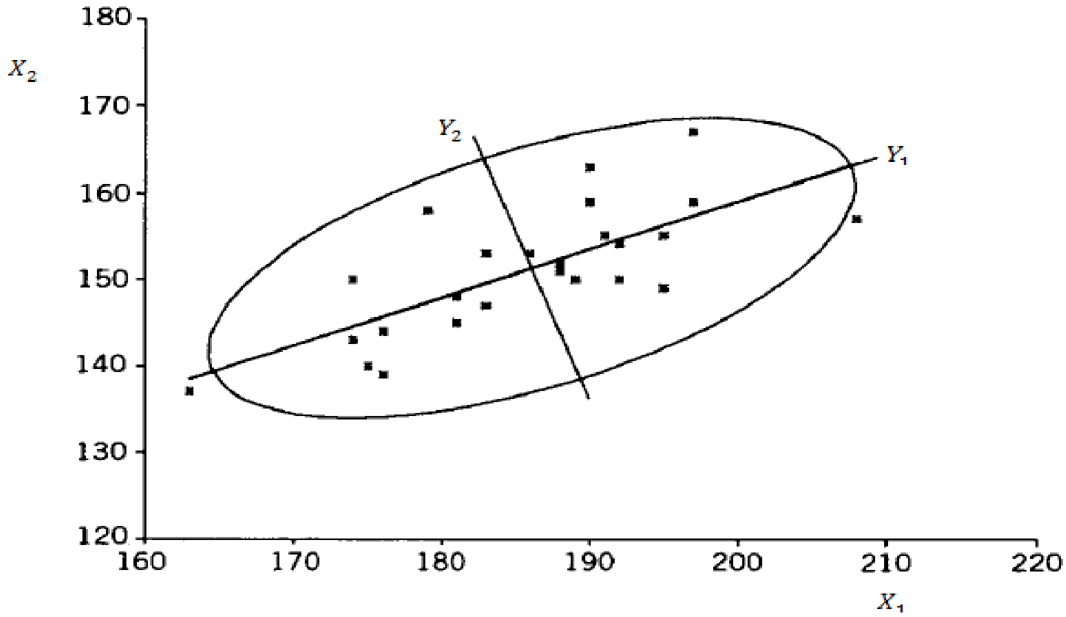
$\hat{\sigma}^2_{Top} = \text{İ}z(S) = s_{11} + s_{22} = 95,29 + 54,36 = 149,65$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 131,52 + 18,13 = 149,65$ olup, $\hat{\sigma}^2_{Top} = \lambda_1 + \lambda_2 = 149,65$ dir. Böylece her bir TB'nin toplam varyansı açıklama oranı: $V.A.O = \frac{\lambda_j}{\hat{\sigma}^2_{Top}}$ $, j = 1, 2$ eşitliği ile hesaplanır.

λ_j	$V.A.O$	Toplam varyansın %88 'ini 1.TB ile açıklamak mümkündür. Geriye kalan %12'lik kısım ise 2.TB ile açıklanmaktadır
131,52	131,52/149,65=0,88	
18,13	18,13/149,65=0,12	

e) Başlangıç sistemine ait gözlemler için serpme diyagramı aşağıdaki şekilde görülmektedir. Gözlemlerin bu şekilde dağılım göstermesi X_1 ve X_2 değişkenleri arasında aynı yönde ve yüksek derecede ilişki olduğunu göstermektedir. Bu durum hem varyans –kovaryans matrisinde hem de korelasyon matrisinde görülmektedir. Çünkü $Cov(X_1, X_2) = 52,87$ ve $Kor(X_1, X_2) = 0,73$'dür. Bu sisteme TBA uygulandığında veri kümesine ait gözlemlerin yayılımı elde edilecek olan yeni eksenler (TB'ler) olan $Y_1 = \underline{a}'_1\underline{X} = 0,825X_1 + 0,565X_2$ ve $Y_2 = \underline{a}'_2\underline{X} = -0,565X_1 + 0,825X_2$ boyunca ve bir elips içerisinde olacaktır. Elipsin büyük (uzun) ekseni

1.TB olup $\underline{a}_1$ özvektörünün doğrultusunda ve $\overline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 185{,}7 \\ 151{,}1 \end{bmatrix}$ örnek ortalamasını temsil eden noktadan geçen doğrudur. Bu doğrunun eğimi $m = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{0{,}565}{0{,}825}$ dir. Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denkleminden hareketle büyük eksenin denklemi bulunabilir.





Büyük eksenin denklemi $y_2 = 0$ alınarak 2.TB'den de bulunabilir. $y_2 = 0$ ise o zaman

$a_{21}(X_1-\overline{X}_1)+a_{22}(X_2-\overline{X}_2)=0 \Rightarrow -0{,}565(X_1-185{,}7)+0{,}825(X_2-151{,}1)=0 \Rightarrow$

$0{,}825X_2 = 0{,}565X_1 + 19{,}737 \;\Rightarrow\; X_2 = \frac{0{,}565}{0{,}825}X_1 + 19{,}737$…. Büyük eksen (1.TB) doğrusu

Burada TB'ler yeni orijini $\underline{\overline{X}}$ örnek ortalama vektörünün temsil ettiği noktaya taşıdığından başlangıç değişkenlerinin ortalamadan farkları alınmıştır.

f) Y_j temel bileşeni ile X_t değişkeni arasındaki korelasyon:

$r_{Y_j,X_t} = \frac{\sqrt{\lambda_j}a_{jt}}{s_t}$ $j=1,2; t=1,2$. İle bulunur. Buna göre;

$j=1\,,t=1$ için $r_{Y_1,X_1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}a_{11}}{s_1} = \frac{\sqrt{131{,}52}*(0{,}825)}{\sqrt{95{,}29}} = 0{,}969$

$j=1\,,t=2$ için $r_{Y_1,X_2} = \frac{\sqrt{\lambda_1}a_{12}}{s_2} = \frac{\sqrt{131{,}52}*(0{,}565)}{\sqrt{54{,}36}} = 0{,}879$

$j=2\,,t=1$ için $r_{Y_2,X_1} = \frac{\sqrt{\lambda_2}a_{21}}{s_1} = \frac{\sqrt{18{,}13}*(-0{,}565)}{\sqrt{95{,}29}} = -0{,}246$

$j=2\,,t=2$ için $r_{Y_2,X_2} = \frac{\sqrt{\lambda_2}a_{22}}{s_2} = \frac{\sqrt{18{,}13}*(0{,}825)}{\sqrt{54{,}36}} = 0{,}476$

bulunur. Bu sonuçlara göre: Birinci TB Y_1 ile X_1 ve X_2 değişkenleri arasında oldukça yüksek ilişkiler varken ikinci TB Y_2 ile X_1 ve X_2 değişkenleri arasında nispeten daha zayıf ilişki bulunmaktadır.

g) Örnek birimlerine ait temel bileşen skorları aşağıdadır.

Birim	1.TB Skoru	2.TB Skoru	Birim	1.TB Skoru	2.TB Skoru
1	245,15	19,96	14	246,585	23,825
2	245,06	12,75	15	240,415	18,355
3	232,945	19,835	16	211,88	20,93
4	237,42	22,83	17	248,45	17,71
5	226,56	19,36	18	239,895	21,135
6	260,305	12,005	19	231,25	17,36
7	240,675	16,965	20	223,475	16,625
8	252,36	19,87	21	245,41	18,57
9	240,98	19,18	22	224,345	19,665
10	243,15	15,27	23	223,735	15,235
11	236,945	29,215	24	256,88	26,47
12	234,03	17,88	25	248,845	27,125
13	228,30	25,44			

Örnek:2 $\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ değişkenler vektörünün oluşturduğu kitleden rastgele çekilen bir örneklemden örnek kovaryans matrisi $Cov(\underline{X}) = S = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix}$, $(s_{22} > s_{11})$ ve $\underline{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$

standart değişkenler vektörü için kovaryans matrisi (ki bu başlangıç sistemine ait korelasyon matrisi) $Cov(\underline{Z}) = Kor(\underline{X}) = R = \begin{bmatrix} 1,00 & 0,80 \\ 0,80 & 1,00 \end{bmatrix}$ olsun. Buna göre;

a) S matrisini kullanarak TB leri elde ediniz? Her bir TB'nin toplam varyansı açıklana oranlarını hesaplayınız ve değerlendiriniz?

b) R matrisini kullanarak TB leri elde ediniz? Her bir TB'nin toplam varyansı açıklana oranlarını hesaplayınız ve değerlendiriniz?

c) Her iki durum için TB'ler ile X_t değişkenleri ya da Z_t değişkenleri arasındaki ilişkileri hesaplayınız?

d) (a) ve (b) de elde edilen TB'leri karşılaştırınız?

<u>**Çözüm**</u> **a)** Önce S matrisinin öz değer ve karşılık gelen öz vektörlerini bulmalıyız.

$|S - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 25-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 26\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{640}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 25,65$ ve $\lambda_2 = 0,35$ bulunur.

$\lambda_1 = 25,65$ için karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_1 = ?$

<u>**I.Yol**</u> (Homojen Lineer Denklem Sistemi çözümü ile)

$(S - \lambda_1 I)\underline{a}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -24,65 & 4 \\ 4 & -0,65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -24,65a_{11} + 4a_{12} = 0 \\ 4a_{11} - 0,65a_{12} = 0 \end{cases}$ homojen lineer denklem sistemi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olduğundan parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. Bu çözümler $t \in IR$ parametre olmak üzere $a_{11} = t$ dersek, birinci denklemden $a_{12} = \frac{24,65}{4} t = 6,1625t$ bulunur. Böylece sonsuz çözüm olan öz vektör; $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 6,1625t \end{bmatrix}$, $t \in IR$ olur. Bu sonsuz çözüm vektörleri normlanırsa $\underline{a}_1^* = \frac{1}{\sqrt{\underline{a}_1' \underline{a}_1}} \underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{38,9764t}} \begin{bmatrix} t \\ 6,1625t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,160 \\ 0,987 \end{bmatrix}$ elde edilir. Normlu vektör tek olup, buna göre $\lambda_1 = 25,65$ için karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 0,160 \\ 0,987 \end{bmatrix}$ olur.

<u>**II. Yol**</u> (algoritma uygulayarak)

Uygulanacak olan algoritma üç adımlık bir algoritmadır. Simetrik ve pozitif tanımlı bir $A: p \times p$ matrisinin λ_j öz değerine karşılık gelen $\underline{a}_j$ öz vektörünü bulmak istediğimizi kabul edelim $(j = 1, 2, \ldots, p)$

1.Adım $A - \lambda_j I_p$ matrisi oluşturulur.

2.Adım $A - \lambda_j I_p$ matrisinin adjoint matrisi bulunur.

$Adj(A - \lambda_j I_p) = [Kof(A - \lambda_j I_p)]'$. $A: p \times p$ matrisi simetrik olduğundan $A - \lambda_j I_p$ matrisi simetrik ve böylece $Kof(A - \lambda_j I_p)$ adjoint matrisi de simetriktir. Bu durumda $Adj(A - \lambda_j I_p) = [Kof(A - \lambda_j I_p)]$ olur. Elde edilen bu matrisin tüm kolonları birbirleri ile orantılıdır.

3.Adım İkinci adımda elde edilen matrisin her bir kolunu üzerinde şu işlem uygulanır. Her hangi bir kolona ait bütün elemanlar, o kolondaki elemanların kareleri toplamının karekökünе bölünür. Bu adımda elde edilen matrisinin sıfır vektöründen farklı olan herhangi bir kolonu öz vektör olarak alınır.

Şimdi bu algoritmayı uygulayarak $\lambda_1 = 25{,}65$ için karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_1$ öz vektörünü bulalım. Burada A matrisi yerine S matrisini alacağız.

i) $S - \lambda_1 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25{,}65 & 0 \\ 0 & 25{,}65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24{,}65 & 4 \\ 4 & -0{,}65 \end{bmatrix}$ …simetrik

ii) $Adj(S - \lambda_1 I_2) = [Kof(S - \lambda_1 I_2)] = \begin{bmatrix} -0{,}65 & -4 \\ -4 & -24{,}65 \end{bmatrix}$…(2 kolon 1.kolonun (80/13) katıdır.)

iii) $\begin{bmatrix} -0{,}65/\sqrt{(-0{,}65)^2 + (-4)^2} & -4/\sqrt{(-4)^2 + (-24{,}65)^2} \\ -4/\sqrt{(-0{,}65)^2 + (-4)^2} & -24{,}62/\sqrt{(-4)^2 + (-24{,}65)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}160 & -0{,}160 \\ -0{,}987 & -0{,}987 \end{bmatrix}$

olup, aranan öz vektör $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}160 \\ -0{,}987 \end{bmatrix}$ veya $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}160 \\ 0{,}987 \end{bmatrix}$ olacaktır. Çünkü her ikisi de aynı vektör olup sadece doğrultuları farklıdır.

Benzer şekilde $\lambda_2 = 0{,}35$ için karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}987 \\ -0{,}160 \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Bu öz vektörler birim normal öz vektörler olup birbirlerine dik ve $\underline{a}_1' \underline{a}_2 = 0$ dır. Böylece S matrisinden elde edilen birinci ve ikinci TB'ler varyans büyüklüğü sıralamasına göre;

$Y_1 = \underline{a}_1' \underline{X} = 0{,}160X_1 + 0{,}987X_2$ ve $Y_2 = \underline{a}_2' \underline{X} = 0{,}987X_1 - 0{,}160X_2$ olur. S matrisine göre ikince değişkene ait varyansın, $s_{22} = 25$ büyük olması, birinci emel bileşene yansıyacaktır. Birinci temel bileşende de ikinci değişkenin (X_2) ağırlığının oldukça yüksek olduğu görülmektedir. Birinci TB'de X_1 ağırlığı ise çok düşüktür. İkinci TB'de ise tam tersi durum söz konusudur. Ayrıca; temel bileşenlerin varyansları sırası ile $Var(Y_1) = \lambda_1 = 25{,}65$ ve $Var(Y_2) = \lambda_2 = 0{,}65$ dır. Görüldüğü gibi toplam varyansın hemen hemen tamamı birinci TB tarafından açıklanmaktadır. Birinci TB'nin toplam varyansı açıklama oranı:

$V.A.O(Y_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{25{,}65}{26} = 0{,}9865$ olup, toplam varyansın yaklaşık %99'u birinci TB ile açıklanabilmektedir.

b) Şimdi de korelasyon matrisinin öz değer ve öz vektörlerini bulalım.

$|R - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0{,}80 \\ 0{,}80 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 0{,}36 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2{,}56}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1{,}8$ ve $\lambda_2 = 0{,}2$ bulunur. Öz vektörlerin bulunmasında (a) daki yol izlendiğinde; $\lambda_1 = 1{,}8$ öz değerine karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0{,}707 \end{bmatrix}$ iken, $\lambda_2 = 0{,}2$ öz değerine karşılık gelen öz vektör $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ -0{,}707 \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Böylece R matrisinden elde edilen TB'ler standart değişkenlerin doğrusal fonksiyonları olacağından, birinci TB $Y_1 = \underline{a}_1' \underline{Z} = 0{,}707Z_1 + 0{,}707Z_2$ ve ikinci TB $Y_2 = \underline{a}_2' \underline{Z} = 0{,}707Z_1 - 0{,}707Z_2$ olacaktır. Görüldüğü gibi standart değişkenlerin her iki TB üzerinde ağırlıkları mutlak değerce birbirlerine eşittir. Ama toplam varyansı açıklama oranları birbirinden farklı olacaktır, çünkü $\lambda_1 > \lambda_2$ dir. Birinci TB'nin toplam varyansı açıklama oranı

$V.A.O(Y_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{1,8}{2} = 0,90$ dır. Bu sonuca göre birinci TB toplam varyansı oldukça yüksek bir oranda açıklamaktadır. Bunun nedeni X_1 ve X_2 değişkenleri arasında 0,80 gibi yüksek bir korelasyon olmasındandır. Fakat standart değişkenler Y_1 üzerinde eşit ağırlığa sahiptirler, bunun nedeni ise standart değişkenlerin varyanslarının eşit olmasıdır.

c) S matrisinden elde edilen TB'ler ile R matrisinden elde edilen TB'ler karşılaştırılacak olursa şu sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

i) R matrisinden elde edilen TB'ler tarafından açıklanan varyans oranları, S matrisinden elde edilen TB'ler tarafından açıklanan varyans oranlarından farklıdır.

ii) R matrisinden elde edilen TB'lerin katsayıları, S matrisinden elde edilen TB'lerin katsayılarından farklıdır.

iii) R matrisinden elde edilen TB'leri başlangıç sistemine ait değişkenlere (X_t) göre ifade edersek, bu TB'ler halâ, S matrisinden elde edilen TB'ler ile aynı olmayacaktır. Standart değişkenleri başlangıç sistemindeki orijinal değişkenlere dönüştürdüğümüzde, R'nin TB'leri;

$$Y_1 = 0,707Z_1 + 0,707Z_2 = 0,707\left(\frac{X_1-\overline{X}_1}{s_1}\right) + 0,707\left(\frac{X_2-\overline{X}_2}{s_2}\right) = 0,707\left(\frac{X_1-\overline{X}_1}{1}\right) + 0,707\left(\frac{X_2-\overline{X}_2}{5}\right)$$

$$= 0,707X_1 + 0,141X_2 + \left(-0,707\overline{X}_1 - 0,141\overline{X}_2\right) = 0,707X_1 + 0,141X_2 + (sabit)$$

$$Y_2 = 0,707Z_1 - 0,707Z_2 = 0,707\left(\frac{X_1-\overline{X}_1}{s_1}\right) - 0,707\left(\frac{X_2-\overline{X}_2}{s_2}\right) = 0,707\left(\frac{X_1-\overline{X}_1}{1}\right) - 0,707\left(\frac{X_2-\overline{X}_2}{5}\right)$$

$$= 0,707X_1 - 0,141X_2 + \left(-0,707\overline{X}_1 + 0,141\overline{X}_2\right) = 0,707X_1 + 0,141X_2 + (sabit)$$

olur. Görüldüğü gibi bu TB'ler, S matrisinden doğrudan elde edilen $Y_1 = 0,160X_1 + 0,987X_2$ ve $Y_2 = 0,987X_1 - 0,160X_2$TB'lerinden çok farklıdır. Bunun nedeni S matrisinden doğrudan elde edilen TB'lerin ölçekten bağımsızlığının eksikliğinden kaynaklanmaktadır.

iv) R matrisinden elde edilen TB'ler ölçekten bağımsızdır, çünkü R matrisinin kendisi ölçekten bağımsızdır.